# Εφαρμογή

11/5/20

Έστω $\mathbb{Z}$-ομομορφισμός $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3$
$\varphi(x,y) = (x+3y,\ x+y,\ x+5y)$
Να αναλυθεί το $\mathbb{Z}^3 / \mathrm{Im}\varphi$ ως ευθύ άθροισμα κυκλικών $\mathbb{Z}$-μοδίων

Εύρεση βάσης $\mathrm{Im}\varphi$

$\mathbb{Z}^2$ $(1,0), (0,1)$

$\mathrm{Im}\varphi = \langle \varphi(1,0), \varphi(0,1) \rangle = \langle (1,1,1), (3,1,5) \rangle$

Αφού οι βάσεις κανονικές => ο πίνακας της βάσης $\langle (1,1,1), (3,1,5) \rangle$ προς την κανονική βάση του χώρου $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - 3\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow (-1)\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Μορφή Smith

Θυμίζω! **Λήμμα**: Έστω $R$ ΠΚΙ και $F$ ελεύθερο $R$-μόδιο
Έστω $N \leq F$ και έστω ελεύθερο με $\operatorname{rank} N \leq \operatorname{rank} F$
Αν $\{n_1, \dots, n_t\}$ βάση του $N$ και $\{f_1, \dots, f_s\}$ βάση του $F$
=> ∃ μοναδικά : $n_i = \sum a_i f_i$
$a_i \in R$ → τα στοιχεία της Smith

Άρα, αν $\{f_1, f_2, f_3\}$ διατ. βάση του $\mathbb{Z}^3$
$\{g_1, g_2\}$ διατ. βάση του $\mathrm{Im}\varphi$

$g_1 = 1 f_1 + 0 f_2 + 0 f_3$

$g_2 = 0 f_1 + 2 f_2 + 0 f_3$

$\mathbb{Z}/_{\langle 1\rangle} = {}^{\langle 1\rangle}/_{\langle 1\rangle} = \{0\}$

Άρα $\mathbb{Z}^3/\mathrm{Im}\varphi \simeq \underbrace{\mathbb{Z}/_{\langle 1\rangle}}_{0} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}/_{\langle 2\rangle}}_{\mathbb{Z}_2} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}/_{\langle 0\rangle}}_{\mathbb{Z}}$

$$\boxed{\mathbb{Z}^3/\mathrm{Im}\varphi \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}}$$

## Άσκηση

Έστω το $\mathbb{Z}$-μόδιο $\mathbb{Z}^4$ και έστω $A = \langle (14,3,17,7), (10,2,10,4), (-2,1,13,9) \rangle$

Να περιγραφεί ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}^4/A$

Ορίζω τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 10 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 17 & 10 & 13 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Smith}$$

$\mathbb{Z}^4 = \{\underbrace{(1,0,0,0)}_{=e_1}, \underbrace{(0,1,0,0)}_{=e_2}, \underbrace{(0,0,1,0)}_{=e_3}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{=e_4}\}$

$\mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Αν $\{u_1, u_2, u_3\}$ βάση του $A$

$u_1 = 1e_1$, $u_2 = 2e_2$, $u_3 = 6e_3$

Άρα $\mathbb{Z}^4/A \simeq \cancel{\mathbb{Z}/_{\langle 1\rangle}}^{\to 0} \oplus \mathbb{Z}/_{\langle 2\rangle} \oplus \mathbb{Z}/_{\langle 6\rangle} \oplus \mathbb{Z}/_{\langle 0\rangle}$

$\simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}$

→ Γραμμή όλα μηδέν
↓
Μόδιο άπειρο

→ Γραμμή $d_i = \pm 1$ ← αντιστ. του $R$
↓
Τόσοι όροι θα λείπουν από εδώ αθροισμα

**Θεώρημα** (Μοναδικότητα Ανάλυσης)

Έστω R ΠΚΙ, $M \neq 0$, πεπερασμένα παραγόμενο R-μόδιο => γν. ότι υπάρχουν μη μηδενικοί κυκλικοί υπομόδιοι του M: $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ και $d_1 | d_2 | \dots | d_s$ με $Ann(M_i) = <d_i>$

Έστω ότι υπάρχουν κυκλ. υπομόδιοι $\neq 0$ του M με $N_1, \dots, N_t$: $M = N_1 \oplus \dots \oplus N_t$ και $Ann N_i = <d_i'>$ με $d_1' | d_2' | \dots | d_t'$ => $s = t$ και $d_i, d_i'$ συντροφικά

**Θεώρημα** Δομής Ι

Έστω R ΠΚΙ και $M \neq 0$ R-μόδιο πεπερ. παραγόμενο. Τότε

i) υπάρχουν μη μηδενικοί κυκλικοί υπομόδιοι του M, $M_1, \dots, M_s$ με $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ και $d_1 | d_2 | \dots | d_s$ με $Ann M_i = <d_i>$

ii) επιπλέον η ακολουθία $<d_1> \supseteq <d_2> \supseteq \dots \supseteq <d_s>$ καθορίζεται ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΑ από το M.

($\mathbb{Z}$ $d_1 = <1> = \mathbb{Z}$ $d_1 | d_2 | d_3$
$d_2 = <2> = 2\mathbb{Z}$
$d_3 = <6> = 6\mathbb{Z}$)

**Ορισμός**. Η ακολουθία $<d_1> \supseteq \dots \supseteq <d_s>$ καλείται ακολουθία αναλλοίωτων (παραγόντων) του M
ιδεωδών

(στοιχεία $d_1, \dots, d_s$ → αναλλοίωτων παραγόντων
$<d_1>, \dots, <d_s>$ → αναλλοίωτων ιδεωδών)

**Πρόταση**: Δύο πεπερασμένα παραγόμενα R μόδια υπεράνω ενός R ΠΚΙ είναι ισόμορφα αν-ν έχουν την ίδια ακολουθία αναλλοίωτων ιδεωδών (παραγόντων)

απόδ (=>) Έστω $M \simeq N$

άρα ∃ισομορφισμός $f: M \to N$

Θ Δομής I : $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$

$N = N_1 \oplus \dots \oplus N_t$

αλλά και $N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_s)$ αφού $f$ ισομορφ.

Λόγω μοναδικότητας (Δομής I)

$\Rightarrow s = t$ και $Ann\, N_i = Ann f(M_i) \underset{f \text{ ισομ.}, M \simeq N}{\overset{M_i \simeq f(M_i)}{=\!=}} Ann\, M_i, \forall i$

Άρα $Ann\, N_i = Ann\, M_i$

($\Leftarrow$) Έστω ότι $M, N$ έχουν την ίδια ακολουθία αναλλοίωτων ιδεωδών $\langle d_1 \rangle \supseteq \dots \supseteq \langle d_s \rangle$

Από Θ. Δομής I, ∃ κυκλικοί υπομόδιοι

- $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$, με $Ann(M_i) = \langle d_i \rangle$
  Αλλά $M_i = R/_{Ann\, M_i} = R/_{\langle d_i \rangle}$
  $\Big\}\ M \simeq R/_{\langle d_1 \rangle} \oplus \dots \oplus R/\langle d_s \rangle$

- $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$, με $Ann(N_i) = \langle d_i \rangle$
  Αλλά $N_i = R/_{Ann\, N_i} = R/_{\langle d_i \rangle}$
  $\Big\}\ N \simeq R/_{\langle d_1 \rangle} \oplus \dots \oplus R/_{\langle d_s \rangle}$

Θεώρημα (Ταξινόμησης πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων)

Έστω $G$ πεπ. παραγ. αβελιανή ομάδα. Τότε, υπάρχουν μη μηδενικές κυκλικές ομάδες $G_1, \dots, G_r, G_{r+1}, \dots, G_{r+u}$, $r, u \geq 0$

i) $G \simeq G_1 \oplus \dots \oplus G_r \oplus G_{r+1} \oplus \dots \oplus G_{r+u}$

ii) για $i = 1, \dots, r$ τα $G_i$ πεπερασμένα $|G_i| = d_i$ και $d_1 | d_2 | \dots | d_r$

iii) οι $G_{r+1}, \dots, G_{r+u}$ είναι άπειρες κυκλικές ομάδες

* οι ακέραιοι $r, d_i, u$ καθορίζονται μονοσήμαντα από $G$

**ΠΧ** Ταξινόμηση αβελιανών ομάδων τάξης 1000.

- Αφού ομάδα πεπερασμένη $\Rightarrow u = 0$
(απουσιάζουν όλοι οι όροι = άπειρες κυκλικές)

- Πεπ. αβελιανή $\simeq \mathbb{Z}_{d_i}$

$\Downarrow$ Βρίσκουμε όλα τα $d_i$:
- $d_1 \cdot d_2 \cdots d_k = 1000$
- και
- $d_1 | d_2 | \dots | d_k$

$2^3 \cdot 5^3$

$1000 \to \mathbb{Z}_{1000}$

$$\begin{array}{r|l}
1000 & 2 \\
500 & 2 \\
250 &
\end{array}$$

$\to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{500}$ $\quad 2|500$ και $2 \cdot 500 = 1000$

$\to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{250}$ $\quad 2|2|250$ και $2 \cdot 2 \cdot 250 = 1000$

$$\begin{array}{r|l}
1000 & 2 \\
500 & 5 \\
100 & 2 \\
50 &
\end{array}$$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{50}$ $\quad 2|10|50$ και $2 \cdot 10 \cdot 50 = 1000$

$$\begin{array}{r|l}
1000 & 5 \\
200 & 5 \\
40 &
\end{array}$$

$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{200}$

$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{40}$

$$\begin{array}{r|l}
1000 & 5 \\
200 & 10 \\
20 &
\end{array}$$

$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{10} + \mathbb{Z}_{20}$

$$\begin{array}{r|l}
1000 & 10 \\
100 & 10 \\
10 &
\end{array}$$

$\mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{100}$

$\mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{10}$

**Άσκηση** Έστω $\mathbb{K}$ σώμα και έστω το $\mathbb{K}[x]$ μόδιο $M$, όπου με $\operatorname{Ann} M = \langle x^3(x-1)\rangle$ και $\dim_{\mathbb{K}} M = 6$. Να περιγραφεί το $M$.

Είμαστε σε ΠΚΙ γιατί το $\mathbb{K}$ σώμα
Από Θ. Δομής Ι: $M \simeq \mathbb{K}[x]/\langle d_1\rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{K}[x]/\langle d_s\rangle$

όπου $\langle d_1\rangle \supseteq \dots \supseteq \langle d_s\rangle$ και $\langle d_s\rangle = \operatorname{Ann} M = \langle x^3(x-1)\rangle$

**Παρατ**: Έστω $0 \neq f \in \mathbb{K}[x]$ με $\deg f = n$
$\Rightarrow$ και η $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]/\langle f\rangle = n$

καθώς $\mathbb{K}[x]/\langle f\rangle = \{g(x) + \langle f\rangle \mid g(x) \in \mathbb{K}[x]\}$

$\deg f = n$

$\deg(g(x)) \leq n-1$

$= \{1 + \langle f\rangle, x + \langle f\rangle, x^2 + \langle f\rangle, \dots, x^{n-1} + \langle f\rangle\}$

$M = \mathbb{K}[x]/\langle d_1\rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{K}[x]/\langle d_s\rangle$

$\Leftrightarrow \underset{\dim 6}{M} = \mathbb{K}[x]/\langle d_1\rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{K}[x]/\langle d_{s-1}\rangle \oplus \mathbb{K}[x]/\langle x^3(x-1)\rangle \rightarrow \dim 4$

$\Rightarrow$ οι διαστάσεις των υπολοίπων $= 2$
$\Rightarrow$ Το άθροισμα των βαθμών των $d_i = 2$

Θέλω διαιρέτες του $d_s = x^3(x-1)$
άρα $x^{a_i}(x-1)^{\beta_i}$ $\quad 0 \leq a_i \leq 3,\ 0 \leq \beta_i \leq 1$
$\cancel{1}, x, x^2, \cancel{x^3}, x-1, x(x-1), x^2\cancel{(x-1)}, x^3(x-1)$

- Αν $d_1 = x-1 \rightarrow \dim \mathbb{K}[x]/\langle x-1\rangle = 1$

$d_2 \longrightarrow$ βαθμού 1

$d_s = x^3(x-1) \xrightarrow{\dim} \mathbb{K}[x]/\langle d_s\rangle = 4$

$$M = \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x-1\rangle} \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x-1\rangle} \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x^3(x-1)\rangle}$$

$$(x-1) \supseteq \langle x-1\rangle \supseteq \langle x^3(x-1)\rangle$$

- $\langle d_1\rangle = \langle x^2\rangle$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 6}}{M} = \underset{\substack{\downarrow\\ 2}}{\frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x^2\rangle}} \oplus \underset{\substack{\downarrow\\ 4}}{\frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x^3(x-1)\rangle}} \quad \text{και} \quad \langle x^2\rangle \supseteq \langle x^3(x-1)\rangle$$

- $\langle d_1\rangle = \langle x(x-1)\rangle$

$$M = \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x(x-1)\rangle} \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x^3(x-1)\rangle} \quad \text{και} \quad \langle x(x-1)\rangle \supseteq \langle x^3(x-1)\rangle$$

- $\langle d_1\rangle = \langle x\rangle$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 6}}{M} = \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x\rangle}} \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x\rangle} \oplus \underset{\substack{\downarrow\\ 4}}{\frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x^3(x-1)\rangle}} \qquad \cancel{\langle x\rangle \supseteq \langle x-1\rangle}$$